

Csallner András Erik

# **Intervallum-felosztási eljárások a globális optimalizálásban**

című doktori értekezés tézisei

Témavezető:  
Dr. Csendes Tibor  
egyetemi docens



Szeged, 1999

# 1. Bevezetés

A globális optimalizálás mind elméleti, mind alkalmazási oldalról jelentős és szerteágazó területe az alkalmazott matematikának, illetve az informatikának. A globális optimalizálási probléma általános alakja

$$\min_{x \in X} f(x), \quad (1)$$

ahol  $X$  egy tetszőleges részhalmaza az  $n$ -dimenziós valós térnek,  $f$  pedig egy nemlineáris függvény. A szakirodalomból ismert optimalizáló módszerek egy része csupán lokális optimum keresésére alkalmas, míg a globális optimalizáló módszerek is számos esetben csak az  $f$  célfüggvényre vonatkozó erős feltételek mellett konvergálnak a globális optimumhoz, és akkor sem szolgáltatnak matematikai értelemben bizonyító erejű megoldást. Az általános intervallum-felosztási módszerek ezzel szemben tetszőleges elemi függvényekkel megadott célfüggvény esetében képesek előre megadott pontossággal alsó és felső korlátot adni az optimum értékére. Az így kapott korlátok által meghatározott intervallum bizonyíthatóan tartalmazza a globális optimum értékét. A továbbiakban mindig feltesszük, hogy  $X$  egy intervallum.

## 2. Intervallum analízis, az intervallum-felosztás elve

Intervallumok alatt a valós, kompakt intervallumokat szokás érteni, melyek pontos definíciója a következő:

**1. Definíció.** Az  $X=[a, b]=\{x \in \mathbb{R}^n : a \leq x \leq b\}$  halmazt *valós, kompakt intervallumnak* nevezzük, ahol  $a \in \mathbb{R}^n$  és  $b \in \mathbb{R}^n$  az *intervallum alsó, illetve felső korlátja*.

Az egydimenziós valós kompakt intervallumok halmazát  $\mathbf{I}$ -vel, az  $n$ -dimenziósokét pedig  $\mathbf{I}^n$ -nel jelöljük. Ha  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  egy tetszőleges halmaz, akkor  $\mathbf{I}(D)$ -vel jelöljük  $D$  intervallumait, azaz  $\mathbf{I}(D)=\{X \in \mathbf{I}^n : X \subseteq D\}$ . Más szóval  $\mathbf{I}=\mathbf{I}(\mathbb{R})$ , illetve  $\mathbf{I}^n=\mathbf{I}(\mathbb{R}^n)$ . Az intervallumokat nagybetűs szedéssel különböztetjük meg a valós értékektől. Az  $X \in \mathbf{I}^n$  intervallum alsó és felső korlátját az  $\text{lb} : \mathbf{I}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , illetve az  $\text{ub} : \mathbf{I}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  függvények segítségével adjuk meg, így tehát

$$X=\{x \in \mathbb{R}^n : \text{lb}(X) \leq x \leq \text{ub}(X)\}.$$

Egy *intervallum szélességét* a  $w : \mathbf{I}^n \rightarrow \mathbb{R}$  függvénnyel definiáljuk, ezen definíció szerint  $w(X)=\max_{i=1, \dots, n} (\text{ub}(X_i) - \text{lb}(X_i))$ ,  $X \in \mathbf{I}^n$ .

Ugyanakkor a valós függvényeknek megfeleltetünk bizonyos intervallum értelmezési tartományú és értékészletű függvényeket, melyek eleget tesznek a következő elvnek:

**2. Definíció.** Legyen  $f: D \rightarrow \mathbf{R}$  valós függvény, ahol  $D \subseteq \mathbf{R}^n$ . Az  $F: \mathbf{I}(D) \rightarrow \mathbf{I}$  intervallum értékű függvényt az  $f$  valós függvény egy *befoglalófüggvényének* nevezzük, amennyiben teljesül rá a következő összefüggés:

$$\forall X \in \mathbf{I}(D) \quad f(X) \subseteq F(X), \quad (2)$$

ahol  $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$  az  $f$  függvény  $X$  feletti értékkészletét jelöli.

A (2)-ben megfogalmazott összefüggést az *intervallum-aritmetika befoglalási elvének* nevezzük. A befoglalásnál erősebb feltételt fogalmaz meg a következő definíció:

**3. Definíció.** Az  $F: \mathbf{I}(D) \rightarrow \mathbf{I}$  ( $D \subseteq \mathbf{R}^n$ ) intervallumfüggvény *izoton* (avagy a *befoglalásra nézve monoton*), ha

$$\forall X, Y \in \mathbf{I}(D), \quad X \subseteq Y \Rightarrow F(X) \subseteq F(Y). \quad (3)$$

A befoglalófüggvények megvalósításához több módszer is rendelkezésre áll, melyek különböző pontossággal és eltérő információ-, illetve műveletigénnyel rendelkeznek. Egy befoglalófüggvény pontosságát, használhatóságát több módon is jellemezhetjük. A következő definíció segítségével ezen tulajdonságot mérjük.

**4. Definíció.** Azt mondjuk, hogy az  $f: D \rightarrow \mathbf{R}$  ( $D \subseteq \mathbf{R}^n$ ) valós függvény  $F: \mathbf{I}(D) \rightarrow \mathbf{I}$  befoglalófüggvénye  $\alpha$ -konvergens, ha  $\exists c \geq 0$  valós konstans és  $\alpha > 0$ , hogy

$$\forall X \in \mathbf{I}(D) \quad w(F(X)) - w(f(X)) \leq c w^\alpha(X). \quad (4)$$

### 3. Az intervallum-felosztási eljárások

Az intervallum-felosztási eljárások, melyek a korlátozás és szétválasztás elvén működnek, a globális optimum adott pontosságú befoglalásához csupán azt feltételezik, hogy a feladat célfüggvényének befoglaló függvénye rendelkezésre áll. Ebben az értelemben egy feladat akkor is megoldható, ha a célfüggvény értékkészlete mérési eredmények alapján valamilyen tolerancia mellett ismeretes csupán. Az intervallum-felosztási eljárások modellalgorithmusa a következő:

**1. Algoritmus** [5]. Az intervallum-felosztási eljárás modellalgorithmusa.

1. Legyen  $L$  egy üres lista,  $A := X$  az aktuális intervallum! Állítsuk a  $k$  iteráció-számlálót  $k := 1$  értékre!
2. Daraboljuk az  $A$  intervallumot véges  $s \geq 2$  számú  $A_i$  ( $i = 1, \dots, s$ ) reszintervallumra úgy, hogy  $A = \bigcup_{i=1}^s A_i$  és  $(\forall i, j = 1, \dots, s: i \neq j) \text{ int}(A_i) \cap \text{int}(A_j) = \emptyset$  teljesüljön, ahol az  $\text{int}(\cdot)$  egy halmaz belsejét jelöli!



3. Vegyük fel a listára az újonnan keletkezett intervallumokat, azaz legyen  $L := L \cup \{A_1\} \cup \dots \cup \{A_s\}!$
4. Töröljünk bizonyos elemeket a listáról, melyek nem tartalmazhatnak globális optimumhelyet!
5. Válasszunk ki egy új  $A \in L$  aktuális intervallumot a listáról, és emeljük le onnan, azaz legyen  $L := L \setminus \{A\}!$
6. Ha a megállási feltétel nem teljesül, növeljük az iteráció-számlálót,  $k := k+1$ , és térjünk vissza a 2. lépéshez!
7. Nyomtassuk ki az eredményt, és STOP!

Az 1. Algoritmus a részleteket nem rögzíti, a konkrét eljárások az egyes lépések pontosításával nyerhetők. Az algoritmus leállásakor a listán maradt részintervallumok uniója tartalmazza az összes globális minimumhelyet.

Az 1. Algoritmus 2. lépésében határozzuk meg, hogy hogyan osszuk fel az aktuális intervallumot. A felosztás során definiálandók a felosztás irányai, a keletkező részintervallumok száma és az osztási arányok. Ez utóbbi meghatározása elegendő információ hiányában mindig ekvidisztáns módon történik.

A 3. lépéssel kapcsolatban merül fel a tárolás módjának kérdése. Ez történhet rendezetlen listával, rendezett adatszerkezettel, illetve a kettő kombinációjával. Az ezekre vonatkozó új eredmények:

**1. Tétel [3].** Ha az 1. Algoritmusban alkalmazott lista rendezetlen, és az új listaelem kiválasztása szükségessé teszi a listaelemek vizsgálatát, akkor a  $k_0$ -dik iterációig a listakezelésre fordított műveletigény a legrosszabb esetben

$$T(s, k_0) = O(sk_0^2). \quad (5)$$

**2. Tétel [3].** Ha az 1. Algoritmusban alkalmazott lista rendezett, és az új listaelem kiválasztása szükségessé teszi a listaelemeknek a lista rendezését adó érték szerinti vizsgálatát, akkor a  $k_0$ -dik iterációig a listakezelésre fordított műveletigény a legrosszabb esetben

$$T(s, k_0) = O(sk_0(\log s + \log k_0)). \quad (6)$$

Az eddig alkalmazott vegyes listakezelési módszerek a következőképpen működnek: a lista rendezés szerinti első  $p_0$  elemét rendezetten, míg a fennmaradó — várhatóan nagyobb számú — elemet rendezetlenül tároljuk. A jó heurisztika ellenére legrosszabb esetben ez az eljárás a rendezetlen listához hasonlóan kvadrátikus műveletigényű. A heurisztikát módosítva jutunk el a *hibrid* listakezeléshez. Ehhez két feltevés szükséges [3]:

1. A rendezett rész elemeit csak akkor pótoljuk, ha a rész teljesen kiürült, akkor azonban a listából a rendezés szerinti legjobb  $p_0$  darabbal teljesen feltöltjük.
2. A  $p_0$  értékét nem rögzítjük konstansként, hanem úgy állapítjuk meg, hogy az mindig az  $L$  lista hosszának egy konstans  $\kappa$ -adrésze legyen.

Az új módszer műveletigénye a következő:

**3. Tétel** [3]. Alkalmazzuk az 1. Algoritmusban a hibrid listakezelési módszert. Ekkor a  $k_0$ -dik iterációig a listakezelésre fordított műveletigény legrosszabb esetben

$$T(s, k_0) = \mathcal{O}(k_0 \log(sk_0)). \quad (7)$$

Bizonyítható, hogy nem adható legrosszabb esetben jobb módszer a rendezett és a hibrid listakezeléseknél az iterációs ciklusok számától való függésre vonatkozóan:

**4. Tétel** [3]. Amennyiben az 1. Algoritmusban az elemek listára helyezése és az új aktuális elem kiválasztása nem eredményez azonos rendezettséget, akkor a listakezelés műveletigényének  $k_0$ -tól, azaz az elvégzett iterációk számától való függésére kapott  $k_0 \log k_0$  nagyságrend legrosszabb esetben optimális.

FIFO listát alkalmazva (Hansen algoritmus) mind a legjobb, mind a legrosszabb esetben lineáris az iterációk számától való függés. A legjobb esetben a rendezett listakezelés szintén lineáris műveletigényű, míg rendezetlen lista esetén a legjobb és legrosszabb eset műveletigénye megegyezik.

A 4. algoritmikus lépés az ún. gyorsító eljárásokat tartalmazza, melyekkel a keresési fából bizonyos ágak levághatók. Bár ezeknek számos válfaja létezik, mindeddig hiányzott a gyorsító eljárások átfogó elméleti vizsgálata. A minél általánosabb eredmények érdekében azonban érdemes az elemzést (5. fejezet) a felosztó eljárások általános áttekintését követően folytatni.

Az 5. lépés az új aktuális intervallum kiválasztásának módját határozza meg. Az eddig leterjedtebb két módszer a legkisebb célfüggvény alsó korláttal rendelkező (Moore-Skelboe), illetve a legnagyobb szélességű (Hansen) intervallum kiválasztása. Hansen módszerének elméleti vizsgálata eddig hiányzott, megadásához az iterációs szintek fogalma ad eszközt:

**5. Definíció** [2]. Azt mondjuk, hogy Hansen algoritmusának  $k$ -dik iterációs ciklusa az  $l$ -dik (iterációs) szinten van, ha az  $L$  listán található elemek szélességének maximuma  $2^{-l}w(X)$ .

A fejezet további eredményei az intervallumfelezést alkalmazó eljárásokra vonatkoznak, mivel a szakirodalom túlnyomóan ezekkel foglalkozik. Ezek szerint Hansen algoritmusának konvergencia-sebessége legrosszabb esetben a Moore-Skelboe algoritmuséhoz hasonlóan exponenciálisan függ a változószámtól:

**5. Tétel** [2]. Ha  $F$  az  $f$  célfüggvénynek  $\alpha$ -konvergens befoglalófüggvénye, akkor legrosszabb esetben is teljesül, hogy

$$\text{lb}(f(X)) - \text{lb}(F(A)) \leq c(2w(X))^\alpha (k+1)^{-\alpha k/n}, \quad (8)$$

ahol  $A$  a Hansen-algoritmus  $k$ -dik iterációjának aktuális intervalluma,  $c$  pedig a 4. Definícióból származó konstans.

A konvergencia rendje Hansen algoritmusánál legjobb esetben sem változik.

**6. Tétel** [10]. Legyen  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  tetszőleges célfüggvény, melynek  $F$  befoglalófüggvénye  $\alpha$ -konvergens. Ekkor legjobb esetben a Hansen algoritmus  $k$ -dik iterációjának  $A$  aktuális intervallumára igaz, hogy

$$\text{lb}(f(X)) - \text{lb}(F(A)) \leq c w^\alpha(X) k^{-\alpha/n}, \quad (9)$$

ahol  $c$  a 4. Definícióból származó konstans. Az  $\mathcal{O}(k^{-\alpha/n})$  rendnél jobb felső becslés az alsó korlátok konvergenciájára nem adható.

Ugyanakkor a Moore-Skelboe algoritmusra legjobb esetben a következő igaz:

**7. Tétel** [10]. Legyen  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  tetszőleges célfüggvény, melynek  $F$  befoglalófüggvénye  $\alpha$ -konvergens. Ekkor legjobb esetben a Moore-Skelboe algoritmus  $k$ -dik iterációjának  $A$  aktuális intervallumára igaz, hogy

$$\text{lb}(f(X)) - \text{lb}(F(A)) \leq c 2^{-\alpha \lfloor k/n \rfloor} w^\alpha(X), \quad (10)$$

ahol  $c$  a 4. Definícióból származó konstans.

Az 1. Algoritmus 6. lépése tartalmazza a megállási feltételt, mely különböző intervallumkiválasztási szabályok esetén eltérően választandó meg. A megállási feltételeknek alapvetően két osztálya létezik: az optimum értékének és az optimum helyének pontosságára vonatkozóké. Az első osztályba tartozó legegyszerűbb és leggyakrabban használt ilyen feltétel a következő:

$$w(F(A)) < \varepsilon. \quad (11)$$

A feltétel Moore-Skelboe eljárásokra informatív, bizonyos esetekben azonban alkalmazható Hansen algoritmusára is:

**8. Tétel** [4]. Teljesüljön Hansen algoritmusának 6. lépésében az  $A$  aktuális intervallumra a (11) megállási feltétel, tegyük fel továbbá, hogy az  $f$  célfüggvény Lipschitz-folytonos, és  $F$  befoglalófüggvénye  $\alpha$ -konvergens. Igaz ekkor, hogy

$$\text{ub}(F(A)) - \min_{Y \in L \cup \{A\}} \text{lb}(F(Y)) < c 2^{-\alpha l} w^\alpha(X) + K 2^{-l} w(X) + \varepsilon, \quad (12)$$

ahol  $X$  a kiindulási intervallum,  $l$  az aktuális iterációs szint,  $c$  a befoglalófüggvény  $\alpha$ -konvergenciájának definíciójából származó együttható,  $K$  a célfüggvény Lipschitz-konstansa,  $\varepsilon > 0$  pedig a megállási feltételtől származó szám.

További feltételek esetén az is előre megjósolható, hogy az algoritmus mely iterációs szinten áll majd meg:

**9. Tétel** [4]. Ha az  $f$  célfüggvény Lipschitz-folytonos a  $K$  állandó mellett a maximum normára nézve, valamint a befoglalófüggvénye  $\alpha$ -konvergens a  $c$  konstanssal, akkor Hansen algoritmusának a (11) feltétel alapján való megállásakor az aktuális  $l$  iterációs szintre igaz, hogy

$$\delta \leq c 2^{-\alpha l} w^\alpha(X) + K 2^{-l} w(X). \quad (13)$$



amennyiben a befoglalás  $w(F(A))$  pontossága nem kell, hogy jobb legyen, mint egy adott  $\delta > 0$  ( $\delta \leq \varepsilon$ ) érték. Érvényes továbbá, hogy

1. ha  $\alpha=1$ , akkor  $l$ -re felső korlát adható a következőképpen:

$$l \leq \log_2 \frac{(c+K)w(X)}{\delta}, \quad (14)$$

2. az  $\alpha=2$  esetben az  $l$ -re adható felső korlát

$$l \leq \log_2 \frac{(\sqrt{K^2 + 4\delta c} + K)w(X)}{2\delta}. \quad (15)$$

Mivel az intervallum-felosztási módszerek garantált megoldást szolgáltatnak, egy lényeges felhasználási területük lehet a numerikus matematikai bizonyítás. Egy gyakorlati felhasználás kapcsán először sikerült így bizonyítást adni egy elvi problémára. A feladat abban állt, hogy vegyipari szeparációs hálózatok esetén az optimális megoldás tartalmazhat-e azonos szeparátorokból több darabot, illetve visszaáramolhat-e folyamatosan anyag valamely szeparátorokba optimális esetben. A heurisztika szerint mindkét kérdésre nemleges a válasz. Az intervallum-felosztási eljárások segítségével azonban sikerült ellenpéldák létezését igazolnom matematikai bizonyító erővel, mellyel az eddigi alapfeltevés megdőlt [1].

## 4. Általános felosztó eljárások

Lényeges elvi probléma, hogy gyorsíthatók-e az intervallum-felosztási eljárások, ha egy iterációs cikluson belül nem csupán felezés történik, hanem ennél több darabra vágás [5]. Ennek speciális esete a szeletelés, amikor egy irányban  $s$  darabra szeljük az aktuális intervallumot. Az ilyen algoritmus konvergencia-sebességére vonatkozó korlát speciális esetben szolgáltatja az 5. Tétel eredményét:

**10. Tétel** [5]. Ha  $F$  az  $f$  egy  $\alpha$ -konvergens befoglalófüggvénye  $X$  felett, akkor

$$\text{lb}(f(X)) - \min_{Y \in L \cup \{A\}} \text{lb}(F(Y)) \leq c w^\alpha(X) s^\alpha (k(s-1)+1)^{-\alpha n} \quad (16)$$

igaz a Hansen intervallum-kiválasztási szabályát alkalmazó szeletelő algoritmusra, ahol  $c$  a legkisebb olyan pozitív konstans, melyre az  $\alpha$ -konvergencia teljesül,  $A$  pedig a  $k$ -dik iteráció aktuális intervalluma.

További vizsgálatok az elérhető javulás tekintetében a következőket adják:

**11. Tétel** [5]. Ha a Hansen intervallum-kiválasztási szabályát alkalmazó szeletelő algoritmus valamely  $l$ -dik szintig történő végrehajtásához  $s$  eddigi értékét a  $p$ -szeresére növeljük ( $p > 1$ ,  $p$  egész), akkor a kiindulási intervallum legalább ugyanolyan finomságú felbontásának eléréséhez szükséges iterációs szintek száma a  $\beta$ -szorosára csökken, ahol

$$\beta \geq \left(1 + \frac{\log p}{\log s}\right)^{-1}. \quad (17)$$

Ugyanakkor a szükséges iterációs szám a  $\gamma$ -szorosára változik, ahol

$$\gamma \geq \frac{s-1}{ps-1}. \quad (18)$$

A teszteredmények azt mutatják, hogy  $s$  értékét 5-ig növelve a konvergencia-sebességben a szelelés segítségével jelentős javulás érhető el. Ugyanakkor a minden irányban történő többszörös vágás esetén, amikor az aktuális intervallumot minden koordinátáirányra merőlegesen elvágjuk úgy, hogy az  $s$  darab egybevágó részintervallumra essen szét, a konvergencia sebességére a következő eredmény adódik:

**12. Tétel** [18]. Amennyiben  $F$  az  $f$ -nek  $\alpha$ -konvergens befoglalófüggvénye  $X$  felett, akkor a minden irányba többszörös vágást végrehajtó Hansen algoritmusra

$$\text{lb}(f(X)) - \min_{Y \in L \cup \{A\}} \text{lb}(F(Y)) \leq cw^\alpha(X) s^\alpha (k(s^n - 1) + 1)^{\alpha/n} \quad (19)$$

mindig teljesül, ha  $c$  a 4. Definícióbeli konstans,  $L$  az algoritmus  $k$ -dik iterációs ciklusának listája,  $A$  pedig aktuális intervalluma.

A futtatási eredmények azt igazolják, hogy bizonyos körülmények között a négy darabra vágás a szokásos felezéshez képest akár tizedrészére is csökkentheti a futási időt, de szinte minden esetben érdemes többszörös vágást végezni.

## 5. A gyorsító eljárások hatásvizsgálata

A gyorsító eljárások átfogó elméleti vizsgálatához az alapot egy új fogalom adja meg:

**6. Definíció** [5]. Gyorsító eljárások egy halmazát akkor nevezzük  $\eta$ -gyorsító eljárásnak, ha elemei összességének segítségével minden egyes szint során a listaelemek legalább  $1-\eta$  hányada törölhető ( $0 \leq \eta \leq 1$ ).

Az  $\eta$ -feltevést, mely szerint a 6. Definíció értelmes, teszteredmények is igazolják. Mivel megfelelő  $\eta$  érték csupán az első néhány iterációs szint elérése után várható, ezért az  $\eta$ -gyorsított algoritmus 1. lépésében feltesszük, hogy ezeket a szinteket az eljárás már elvégezte. Az  $\eta$ -gyorsított algoritmus iterációinak az egyes szinteken való elhelyezkedését jellemezni tudjuk:

**13. Tétel** [5]. Ha a  $k$ -dik iterációs ciklus az  $\eta$ -gyorsított algoritmus  $l$ -dik szintjén található és  $\lceil \eta s^n \rceil > 1$ , akkor



$$k \leq \frac{(\lceil \eta s^n \rceil^{l+1} - 1)(s^n - 1)}{(\lceil \eta s^n \rceil - 1)(s - 1)} N_0. \quad (20)$$

Az  $\lceil \eta s^n \rceil = 1$  esetben pedig

$$k \leq \frac{s^n - 1}{s - 1} (l + 1) N_0. \quad (21)$$

Ennek felhasználásával bizonyítható az eljárás konvergencia-sebességére vonatkozó következő korlát:

**14. Tétel [5].** Legyen  $F$  az  $f$  valós függvénynek  $\alpha$ -konvergens befoglalófüggvénye az  $X$  intervallum felett, továbbá jelölje  $L$  az aktuális iterációs ciklus listáját,  $A$  pedig az aktuális intervallumát. Ekkor az  $\eta$ -gyorsított algoritmus  $l$ -dik szintjén lévő bármely  $k$ -dik iterációs ciklusában teljesül, hogy

$$\text{lb}(f(X)) - \min_{Y \in L \cup \{A\}} \text{lb}(F(Y)) = \mathcal{O}(\eta^{al/n} s^{\alpha(n-1)/n} k^{-\alpha/n}), \quad (22)$$

ha  $\lceil \eta s^n \rceil > 1$ .

Amennyiben  $\lceil \eta s^n \rceil = 1$ , a műveletigény a következő:

$$\text{lb}(f(X)) - \min_{Y \in L \cup \{A\}} \text{lb}(F(Y)) = \mathcal{O}(s^{-al/n} k^{-al/n} l^{al/n}) = \mathcal{O}\left(\left(\frac{l}{sk}\right)^{\frac{al}{n}}\right). \quad (23)$$

A megadott összefüggések az  $\eta$  szerepét jól érzékeltetik.

## 6. Összefoglalás

Doktori értekezésem az 1. Algoritmuson elvégezhető, eddig még kevésbé vagy nem vizsgált javítási lehetőségek elméleti és gyakorlati elemzéséből áll. Fő törekvésem, hogy az intervallum-felosztási módszerek sebességét növeljük, működésüket és viselkedésüket jobban megismerjük. Ennek érdekében az eddigi vizsgálataim a következő pontokba foglalhatók össze: az intervallum-felosztási eljárások hatékonyságának növelése többszörös vágás, illetve szeletelés megvalósításával, az algoritmusok tárkezelésének javítása, a gyorsító eljárások elméleti vizsgálata és hatékonyságuk mérhetősége, az intervallum-kiválasztási szabályok konvergencia-sebességre gyakorolt hatása, a megállási feltételek nyújtotta információk hasznosítása, gyakorlati felhasználás, numerikus matematikai bizonyítás intervallumos módszer segítségével.

## Irodalomjegyzék

### A doktori értekezéssel kapcsolatos publikációk listája

#### Tudományos folyóiratokban megjelent, elfogadott, illetve folyóíráthoz benyújtott publikációk

- [1] Csallner, A.E., *Global Optimization in Separation Network Synthesis*, Hungarian Journal of Industrial Chemistry, **21**, pp. 303-308, 1993.
- [2] Csallner, A.E., T. Csendes, *The Convergence Speed of Interval Methods for Global Optimization*, Computers and Mathematics with Applications, **31**, pp. 173-178, 1996.
- [3] Csallner, A.E., *Improving Storage Handling of Interval Methods for Global Optimization*, Acta Cybernetica, **13**, pp. 413-421, 1998.
- [4] Csallner, A.E., *Lipschitz Continuity and the Termination of Interval Methods for Global Optimization*, 14 oldal, közlésre elfogadva a Computers and Mathematics with Applications c. folyóiratba.
- [5] Csallner, A.E., T. Csendes, M.Cs. Markót, *Multisection in Interval Branch-and-Bound Methods for Global Optimization*, 32 oldal, közlésre benyújtva.

#### Konferencia kiadványokban megjelent publikációk

- [6] Csallner A.E., *On the Global Optimization in Chemical Process Design*, Proceedings of the Fourth Bulgarian-Hungarian Workshop on Chemical Engineering, pp. 10-12, Varna, Bulgaria, September 20-24, 1992.
- [7] Halász L., F. Káta, A.E. Csallner, G. Almásy, *On the Solution of Nonlinear Equations in Process Simulation*, Proceedings of the Fourth Bulgarian-Hungarian Workshop on Chemical Engineering, pp. 25-27, Varna, Bulgaria, September 20-24, 1992.
- [8] Csallner A.E., *Global Optimization in Separation Network Synthesis*, Second International Workshop on Mathematical Modelling in Chemical Engineering, p. 3, Budapest, Hungary, July 11-15, 1993.
- [9] Csallner A.E., *The Role of the Interval Selection Rule in the Interval Bisection Methods*, Scientific Computation and Mathematical Modelling, pp. 7-10, Datecs Publishing, Sofia, 1993.
- [10] Csallner A.E., *Intervallum-felező globális optimalizáló módszerek összehasonlítása*, XXI. Magyar Operációkutatási Konferencia, 8. o., Szeged, Hungary, October 2-4, 1993.
- [11] Csallner A.E., *Large Interval Selection Rule and the Convergence Speed in Interval Methods*, XIIth International Conference on Mathematical Programming, p. 6, Mátrafüred, Hungary, January 22-27, 1994.
- [12] Csallner A.E., T. Csendes, *Convergence Speed of Interval Methods for Global Optimization*, 6<sup>th</sup> International Conference on Numerical Methods, p. 14, Miskolc, Hungary, August 22-26, 1994.

- [13] Csallner A.E., T. Csendes, *Convergence Speed of Interval Methods for Global Optimization and the Joint Effects of Algorithmic Modifications*, SCAN-95 IMACS/GAMM Conference, p. 33, Wuppertal, Germany, September 26-29, 1995.
- [14] Csallner A.E., T. Csendes, *Convergence Speed of Interval Methods for Global Optimization and the Joint Effects of Algorithmic Modifications*, Volume of extended abstracts of the IIIrd Workshop on Global Optimization, p. 23, Szeged, Hungary, December 10-14, 1995.
- [15] Csendes T., M.Cs. Markót, A.E. Csallner, *Multisection in Interval Methods for Global Optimization*, Abstracts of the ismp97, p. 69, Lausanne, Switzerland, 1997.
- [16] Csallner A.E., T. Csendes, M.Cs. Markót, *Convergence Properties for Multisection Interval Methods for Global Optimization*, SCAN-97 IMACS/GAMM Conference, pp. V5-V8, Lyon, France, September 10-12, 1997.
- [17] Csendes T., A.E. Csallner, M.Cs. Markót, *Multisection in Interval Methods for Global Optimization*, SCAN-97 IMACS/GAMM Conference, pp. V9-V12, Lyon, France, September 10-12, 1997.
- [18] Csallner A.E., T. Csendes, M.Cs. Markót, *Szeletelő intervallum-felosztási globális optimalizáló eljárások konvergenciátulajdonságai*, XXIII. Magyar Operációkutatási Konferencia, p. 8, Pécs, Hungary, October 20-22, 1997.
- [19] Csallner A.E., M.Cs. Markót, *Improving Interval Methods for Global Optimization*, CSCS Conference, p. 29, Szeged, Hungary, July 18-22, 1998.
- [20] Csallner A.E., T. Csendes, *A Study on the Termination of Interval Subdivision Methods for Global Optimization*, Conference on Numerical Methods and Computational Mechanics, pp. 20-21, Miskolc, Hungary, August 24-27, 1998.
- [21] Csallner A.E., M.Cs. Markót, *Termination Criteria and the Objective Function's Lipschitz Continuity by Interval Subdivision Methods*, IMACS/GAMM SCAN-98 Conference, pp. 25-26, Budapest, Hungary, September 22-25, 1998.
- [22] Csallner A.E., *A Survey on Some Possible Variants of Interval Branch-and-Bound Methods*, XIV International Conference on Mathematical Programming, Mátraháza, Hungary, March 27-31, 1999.

### Egyéb tudományos publikációk

- [23] Csendes T., A.E. Csallner, *Globális optimalizálási eljárások fejlesztése*, A József Attila Tudományegyetem Természettudományi Karának oktatási és kutatási tevékenysége 1995-1997, Szeged, pp. 14-16, 1998.
- [24] Csendes T., A.E. Csallner, *Development of Global Optimization Procedures*, Scientific and Educational Activity at the Faculty of Natural Sciences of JATE University 1995-1997, Szeged, Hungary, pp. 14-16, 1998.